Семинар 14

(13.79) Найти образы при отображении $w=e^z$, $z=x+iy$:

1) прямоугольной сетки $x=C$, $y=C$, $C\in\mathbb{R}$;

2) прямых $y=kx+b$, $k,b\in\mathbb{R}$;

3) полосы $\alpha<y<\beta$, $0\le\alpha<\beta<2\pi$;

4) полосы между прямыми $y=x$, $y=x+2\pi$;

5) полуполосы $x<0$, $0<y<\alpha\le 2\pi$;

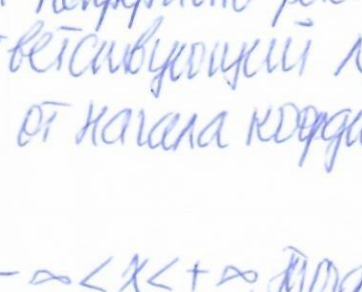
6) полуполосы $x>0$, $0<y<\alpha\le 2\pi$.

Имеем $f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x\cos y+ie^x\sin y \Rightarrow u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$.

1) Если $x=C$, то $u=e^C\cos y$, $v=e^C\sin y \Rightarrow u^2+v^2=e^{2C}$. Значит, получаем окружность с центром в начале координат и радиусом e^C. При этом, когда точка z описывает прямую однократно так, что y непрерывно растет от $-\infty$ до $+\infty$, то w описывает соответствующую окружность бесконечно много раз в одном и том же направлении.

Если $y=C$, то $u=e^x\cos C$, $v=e^x\sin C$. Значит, получаем луч, выходящий из начала координат и образующий с положительной частью действительной оси угол C. При этом, когда точка z описывает прямую однократно так, что x непрерывно растет от $-\infty$ до $+\infty$, то и w описывает соответствующий луч однократно так, что расстояние этой точки от начала координат непрерывно растет от нуля до ∞.

2) Имеем $z=x+i(kx+b)=x(1+ik)+ib$, $-\infty<x<+\infty$. Тогда $f(z)=e^{x+i(kx+b)}=e^x(\cos(kx+b)+i\sin(kx+b)) \Rightarrow |w|=e^x$, $\arg w=kx+b+2\pi m$. Поскольку $|w|=r$, $\arg w=\varphi$, то исключая x, находим



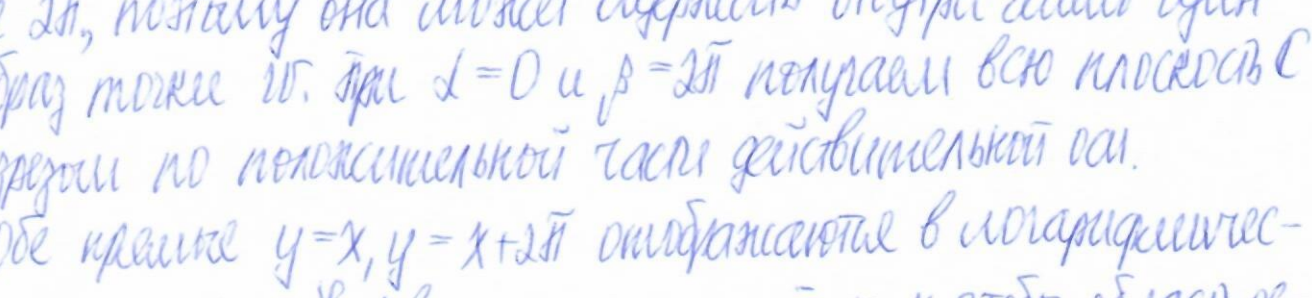
$$r=e^{\frac{\varphi-b-2\pi m}{k}}$$

Но $\arg w$ или угол φ определён только с точностью до целого кратного от 2π. Поэтому, обозначая $\varphi-2\pi m$ снова через φ, получаем $r=Ce^{\frac{\varphi}{k}}$, где $C=e^{-\frac{\theta}{k}}$. Это есть уравнение логарифмической спирали.

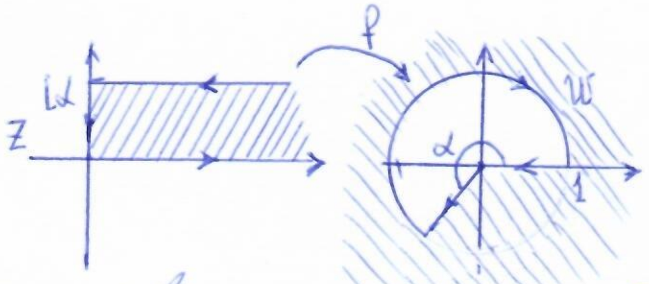
3) Имеем полосу, ограниченную прямыми линиями $y=\alpha$, $y=\beta$. Образом такой области будет угол раствора $(\beta-\alpha)$ с вершиной в начале координат, ограниченный прямолинейными лучами $\arg w=\alpha+2\pi k$, $\arg w=\beta+2\pi l$. При этом, соответствие между точками соответствующих областей будет взаимно однозначным. Действительно, прообразами некоторой точки w из полученной области могут быть только точки $\ln|w|+i\arg w$, различающиеся друг от друга значением мнимой части. Две такие точки лежат на одной прямой параллельной мнимой оси, на расстоянии кратным 2π. Но наша полоса имеет ширину не более 2π, поэтому она может содержать внутри лишь один прообраз точки w. При $\alpha=0$ и $\beta=2\pi$ получаем всю плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по положительной части действительной оси.

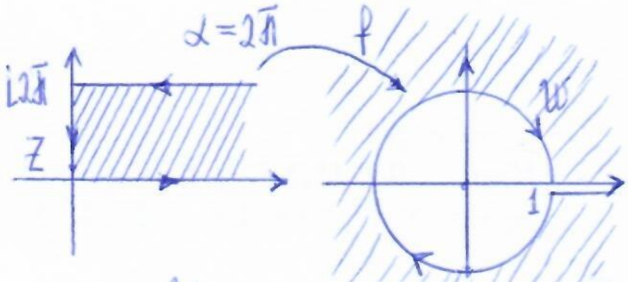
4) Обе прямые $y=x$, $y=x+2\pi$ отображаются в логарифмическую спираль $r=e^{\varphi}$. Двигаясь по прямой $y=x$, чтобы область оставалась слева, а затем таким же образом по прямой $y=x+2\pi$, заключаем, что осуществляется отображение полосы на всю плоскость $\mathbb{C}$ с вырезом по спирали $r=e^{\varphi}$.

5)



Анализируя, во что переходят при отображении $f(z)$ лучи $y=0$, $y=\alpha$ и отрезок $[0,\alpha]$, получаем сектор $r<1$, $0<\varphi\le\alpha$. При $\alpha=2\pi$ имеем единичный круг с разрезом по радиусу $u\in[0,1]$, $v=0$.

б) 



Анализируя, во что переходит при отображении $f(z)$ лучи $y=0$, $y=\alpha$ и отрезок $[0,\alpha]$, получаем область $r>1$, $0<\varphi<\alpha$. При $\alpha=2\pi$ имеем внешность единичного круга с разрезом по лучу $u\in[1,+\infty)$, $v=0$.

13.82 Доказать, что функция Жуковского $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ конформно отображает:

1) внутренность (внешность) единичного круга на внешность отрезка $[-1;1]$;

2) верхнюю (нижнюю) полуплоскость на плоскость с разрезами по полупрямым $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$;

3) область $\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z<0, |z|<1\}$ на верхнюю полуплоскость;

4) область $\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z>0, |z|>1\}$ на верхнюю полуплоскость;

5) область $\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z>0, |z|<1\}$ на нижнюю полуплоскость.

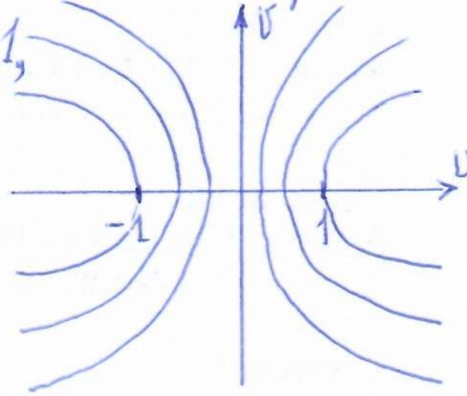
Сначала выясним, в какие кривые функция Жуковского переводит окружности и лучи. Положим $z=re^{i\varphi} \Rightarrow w=u+iv=\frac{1}{2}\left(re^{i\varphi}+\frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right)=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi+i\,\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi \Rightarrow u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi$, $v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi$. Рассмотрим образ окружности $r=r_0$. Имеем

$$\cos\varphi=\frac{u}{\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)},\quad \sin\varphi=\frac{v}{\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)} \Rightarrow \frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r_0-\frac{1}{r_0}\right)^2}=1$$

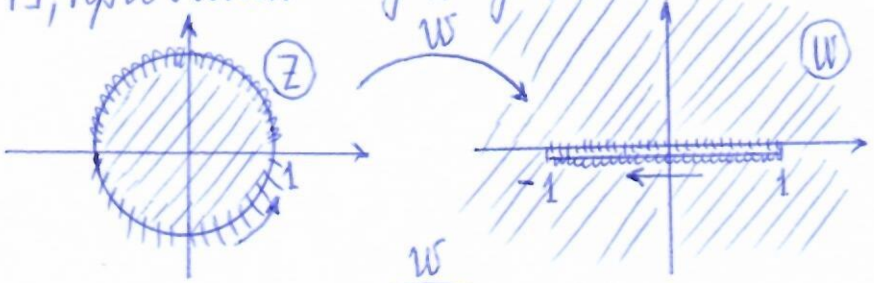
Это есть уравнение эллипса с полуосями $a_{r_0}=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)$, $b_{r_0}=\frac{1}{2}\left|r_0-\frac{1}{r_0}\right|$ $r_0\neq1$ и фокусами в точках ±1, поскольку $c_{r_0}^2=a_{r_0}^2-b_{r_0}^2=1$. Образами окружностей $|z|=r_0\neq1$ в плоскости z будут эллипсы в плоскости w. Если $r_0\to1$, то $a_{r_0}\to1$, $b_{r_0}\to0$. Поэтому эллипсы стягиваются к отрезку $[-1;1]$. При больших r_0

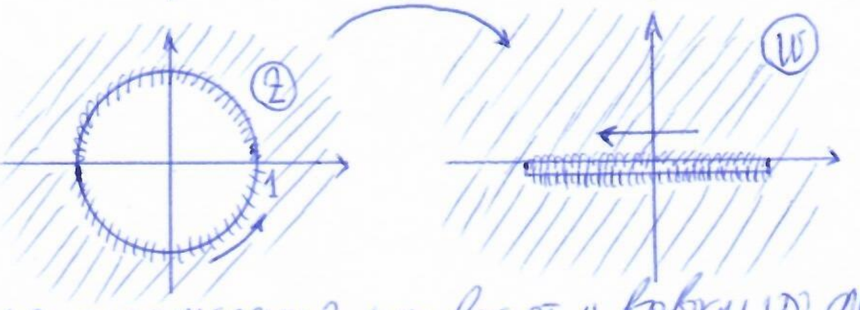
разность $a_{r_0} - b_{r_0} = \frac{1}{r_0}$ мала, и эллипсы мало отличаются от окружностей. Между точками окружности и эллипса существует взаимно однозначное соответствие. При $r_0 > 1$ их направление обхода совпадают, а при $r_0 < 1$ они противоположны.

Чтобы получить образ лучей $\varphi = \varphi_0$ преобразуем выражения для u и v по-другому: $\frac{u}{\cos\varphi} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, $\frac{v}{\sin\varphi} = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2\varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi_0} = 1$.
Это уравнение описывает гиперболу с полуосями $a_{\varphi_0} = |\cos\varphi_0|$, $b_{\varphi_0} = |\sin\varphi_0|$. Следовательно, лучи $\varphi = \varphi_0$ отображаются в части гипербол.



1) Меняя радиус окружности $|z| = r_0$ от 0 до 1, мы заставляем a_{r_0} убывать от ∞ до 1, а b_{r_0} убывать от ∞ до 0. Соответствующие эллипсы пробегут всю совокупность эллипсов плоскости w с фокусами ± 1. Значит, функция w отображает единичный круг взаимно однозначно на внешность отрезка действительной оси $[-1;1]$. При этом, образом центра единичного круга является бесконечно удаленная точка, а образом единичной окружности — отрезок $[-1;1]$, пробегаемый дважды.

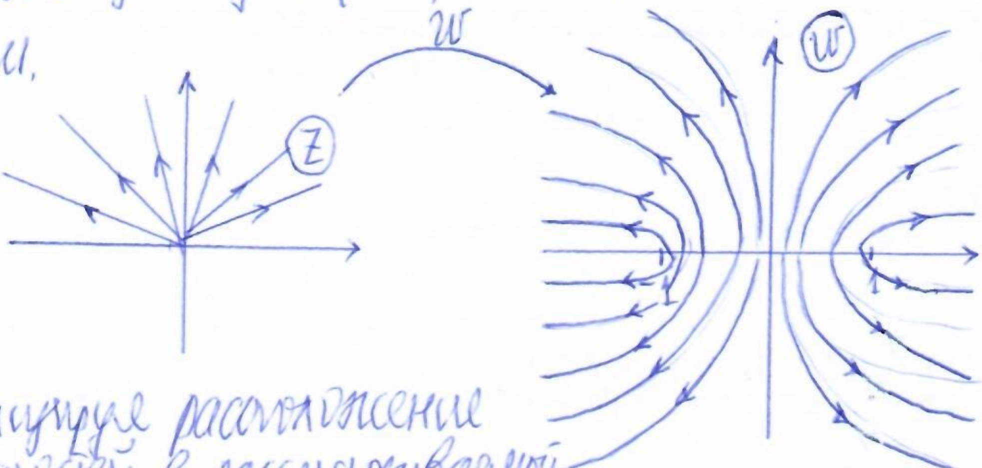




Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что функция w отображает внешность единичного круга взаимно однозначно на внешность отрезка $[-1;1]$ действительной оси.

2) На этой области функция Жуковского конформна. Рассматривая образы лучей, выходящих из нуля и лежащих в верхней полуплоскости, получаем, что образом области $\operatorname{Im} z>0$ является вся плоскость w с разрезами вдоль лучей $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$, лежащих на действительной оси.

Образом области $\operatorname{Im} z<0$ также является вся плоскость w с разрезами вдоль лучей $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$, лежащих на действительной оси.



3) Анализируя расположение окружностей в рассматриваемой области, видим, что они отображаются на соответствующие части эллипсов. Поэтому, полукруг $|z|<1$, находящийся в нижней полуплоскости, отображается на верхнюю полуплоскость.

4) Поскольку $w(z)=w\left(\frac{1}{z}\right)$, то функция Жуковского принимает в точках полукруга $|z|<1$, $\operatorname{Im} z<0$ те же значения, что и в точках верхней полуплоскости, внешних к полукругу $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$. Следовательно, образом области $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0, |z|>1\}$ является верхняя полуплоскость.

5) Анализируя расположение окружностей в рассматриваемой области, видим, что они отображаются на соответствующие части эллипсов. Поэтому, полукруг $|z|<1$, находящийся в верхней полуплоскости, отображается на нижнюю полуплоскость.

13.88 Найти образы при отображении $w=\cos z$, $z=x+iy$:

1) прямоугольной сетки $x=C$, $y=C_1\in R$;

2) полуполоса $\{z\in\mathbb{C}:\ 0<x<\pi,\ y<0\}$;

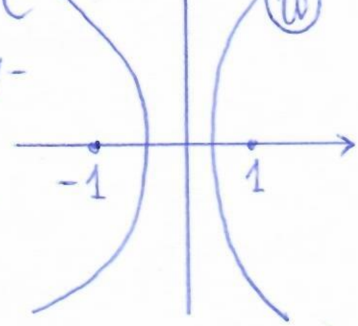
3) полуполоса $\{z\in\mathbb{C}:\ 0<x<\frac{\pi}{2},\ y>0\}$;

4) полуполоса $\{z\in\mathbb{C}:\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ y>0\}$;

5) полоса $\{z\in\mathbb{C}:\ 0<x<\pi\}$.

Имеем $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i\sin x \operatorname{sh} y \Rightarrow u=\cos x\operatorname{ch}y$, $v=-\sin x\operatorname{sh}y$.

1) Для $x=C$ получаем $w=\cos C\operatorname{ch}y-i\sin C\operatorname{sh}y$. При $C=\pi k$ имеем $w=\cos\pi k\operatorname{ch}y=(-1)^k\operatorname{ch}y$, $-\infty<y<+\infty$, то есть w дважды описывает часть $u\geq 1$ действительной оси при k четном и $u\leq -1$ при k нечетном. При $C=-\frac{\pi}{2}+\pi k$ получаем $w=(-1)^k\operatorname{sh}y\,i$, то есть w описывает однократно всю мнимую ось в направлении возрастания при k четном и в направлении убывания при k нечетном. Пусть теперь $C\neq\frac{\pi m}{2}$. Перепишем соотношение для $\cos C\neq 0$, $\sin C\neq 0$: $\frac{u^2}{\cos^2 C}-\frac{v^2}{\sin^2 C}=1$. Получаем уравнение гиперболы с полуосями $|\cos C|$, $|\sin C|$ и с фокусами в точках ± 1. Более того, u сохраняет все время один и тот же знак, одинаковый со знаком $\cos C$, тогда как v непрерывно и монотонно меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому образ прямой $x=C$ совпадает только с одной из двух ветвей гиперболы: с правой ветвью при $\cos C>0$ и с левой ветвью при $\cos C<0$. Отображение прямой $x=C$ на соответствующую ветвь является взаимно однозначным при этом, и каждая из двух полупрямых, на которые наша прямая разделяется действительной осью, взаимно однозначно отображается на одну из полуветвей, на которые ветвь гиперболы разделяется в вершине.

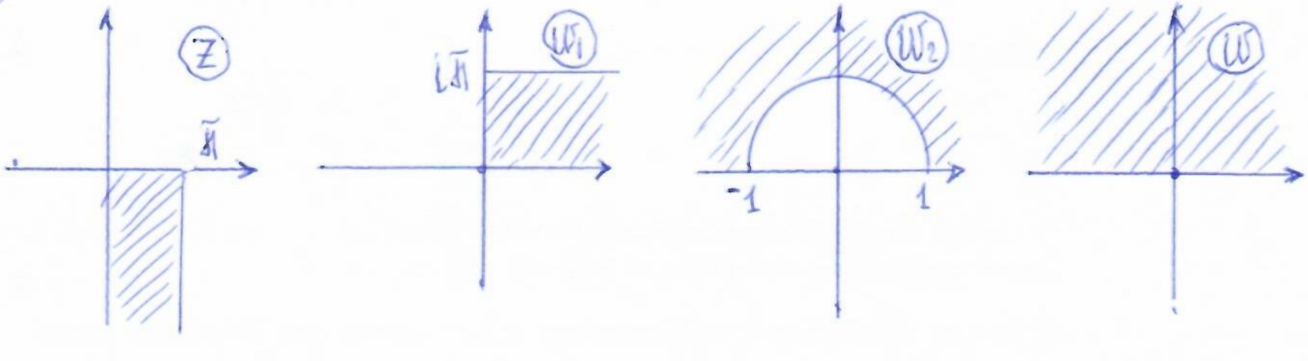


Если теперь $y=C$, то образом такой прямой будет $w = \cos x\,\mathrm{ch}\,C - i\sin x\,\mathrm{sh}\,C$. При $C=0$ имеем действительную ось и $w=\cos x$, $-\infty<x<+\infty$, значит, w описывает бесконечно много раз отрезок $[-1;1]$ действительной оси, причем каждому отрезку прямой длины 2π соответствует двукратный обход указанного отрезка. При $C\neq 0$ имеем $\frac{u^2}{\mathrm{ch}^2 C}+\frac{v^2}{\mathrm{sh}^2 C}=1$. Это уравнение эллипса с полуосями $\mathrm{ch}\,C$ и $|\mathrm{sh}\,C|$ и фокусами в точках ±1. При этом, точка w бесконечное множество раз пробегает эллипс в одном и том же направлении, причем каждый пробег соответствует перемещению точки z по прямой $y=C$ на расстояние, равное 2π.
Таким образом, отображение $w=\cos z$ переводит ортогональную сетку прямых параллельных координатным осям, в сетку эллипсов и гипербол с общими фокусами ±1.

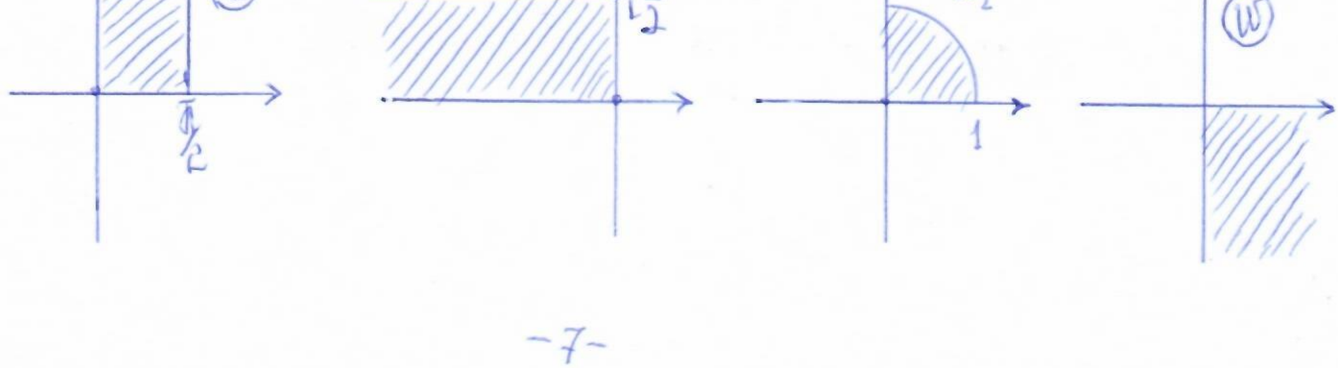
Из вида отображения $w=\cos z$ следует, что оно есть совместная композиция поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ и отображений, осуществляемых показательной функцией и функцией Жуковского:

а) $w_1 = iz$, б) $w_2 = e^{w_1}$, в) $w=\frac{1}{2}\left(w_2+\frac{1}{w_2}\right)$.

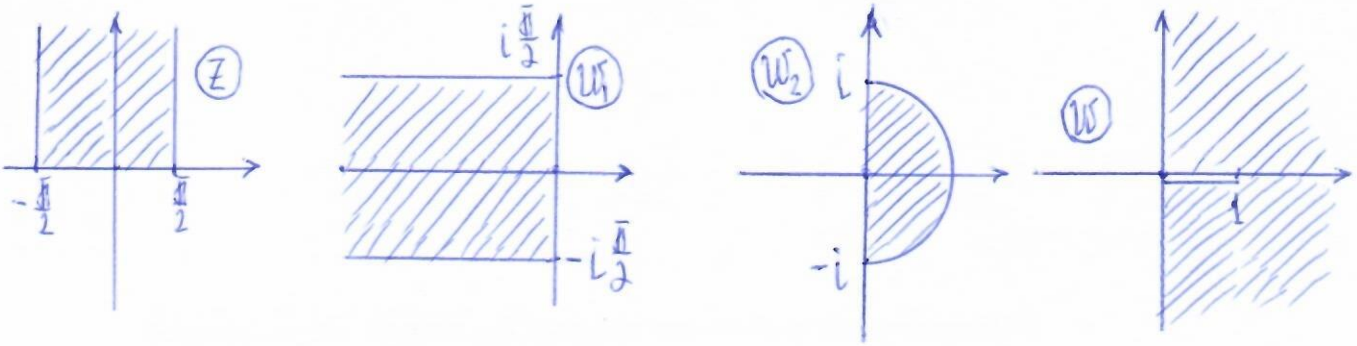
2)



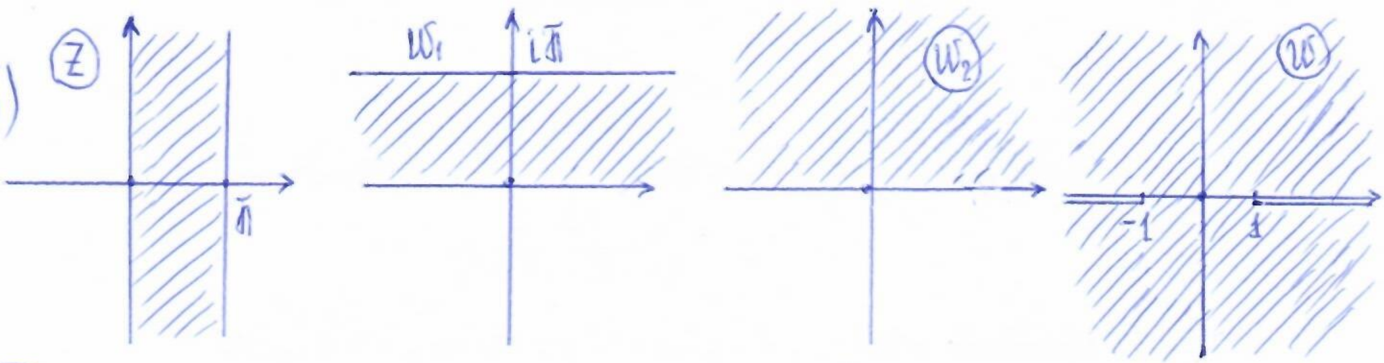
3)



4)



5)



19.89 Найти образы при отображении $w=\operatorname{tg} z$, $z=x+iy$:

1) прямоугольной сетки $x=C$, $y=C$, $C\in\mathbb{R}$;

2) полуполосы $\{z\in\mathbb{C}: 0<x<\pi,\ y>0\}$;

3) полосы $\{z\in\mathbb{C}: 0<x<\pi\}$;

4) полосы $\{z\in\mathbb{C}: 0<x<\frac{\pi}{4}\}$;

5) полосы $\{z\in\mathbb{C}: -\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\}$.

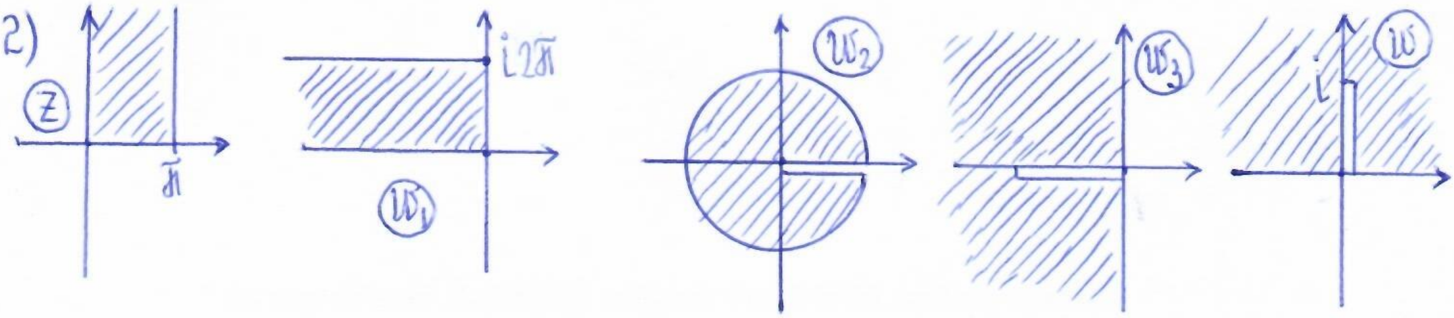
1) Семейство $x=C$ преобразуется в пучок дуг окружностей с концами в точках $w=\pm i$, включающий и соответствующие части мнимой оси. Уравнение пучка окружностей: $(u-a)^2+v^2=1+a^2$, $a=\operatorname{ctg}2C$.

Семейство $y=C$ преобразуется в семейство окружностей Аполлония относительно точек $w=\pm i$, включающее и действительную ось. Уравнение семейства окружностей Аполлония: $u^2+(v-b)^2=b^2-1$, $|b|>1$, $b=\operatorname{cth}2C$.

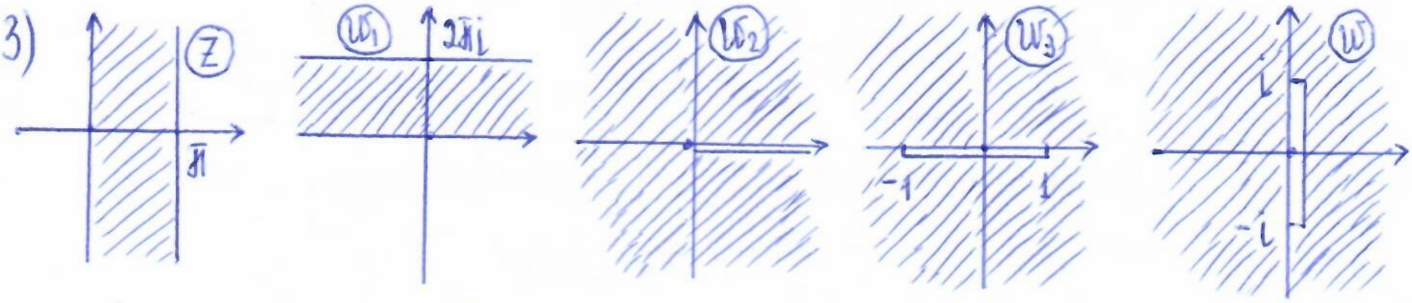
Отображение, осуществляемое функцией $w=\operatorname{tg}z=-i\dfrac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$, есть композиция следующих отображений:

а) $w_1=2iz$, б) $w_2=e^{w_1}$, в) $w_3=\dfrac{w_2-1}{w_2+1}$, г) $w=-iw_3$.

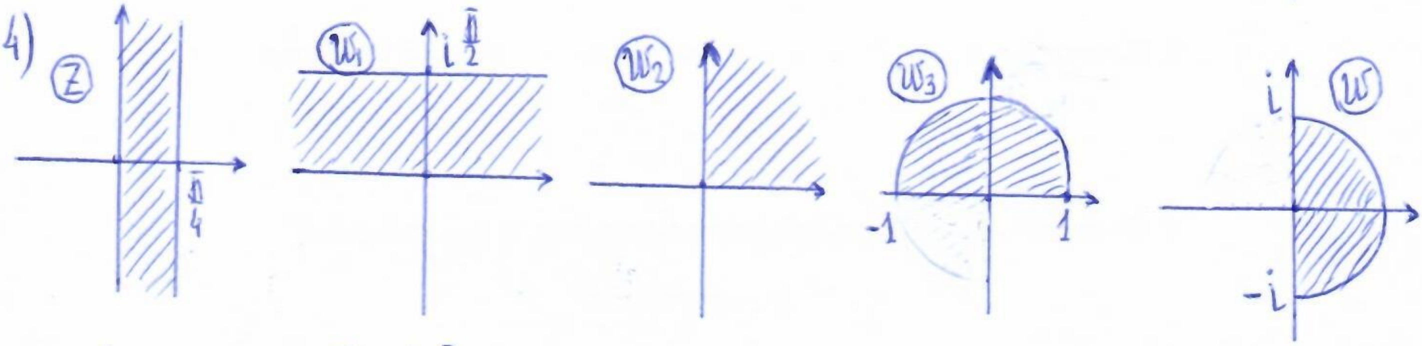
2)



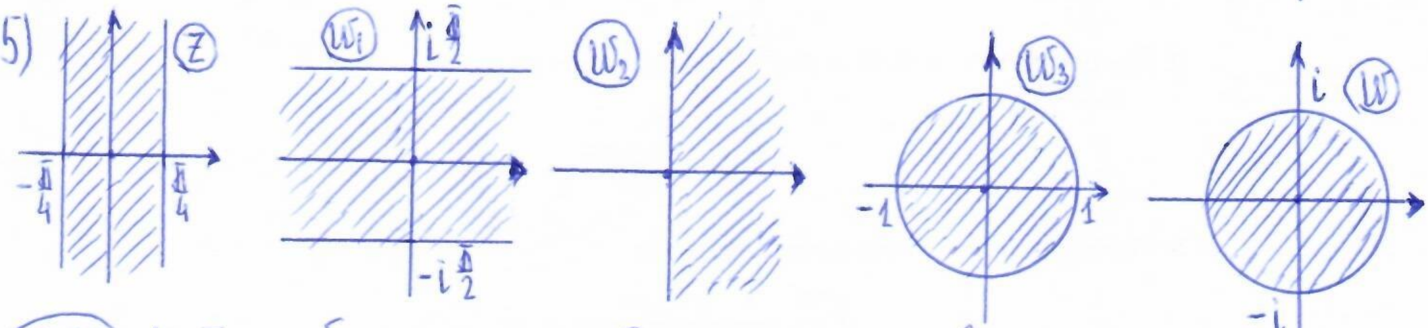
3)



4)



5)



13.90 Найти образы при отображении $w=\operatorname{ch} z$, $z=x+iy$:

1) прямоугольной сетки $x=C$, $y=C$, $C\in R$;

2) полосы $\{z\in C:\ 0<y<\pi\}$;

3) полуполосы $\{z\in C:\ x>0,\ 0<y<\pi\}$.

Пусть $w=u+iv=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\frac{e^{x+iy}+e^{-x-iy}}{2}=\frac{1}{2}(e^x(\cos y+i\sin y)+$ $+e^{-x}(\cos y-i\sin y))=\cos y\operatorname{ch}x+i\sin y\operatorname{sh}x\Rightarrow u=\cos y\operatorname{ch}x,\ v=\sin y\operatorname{sh}x.$

1) Если $x=C$, то $u=\cos y\operatorname{ch}C$, $v=\sin y\operatorname{sh}C\Rightarrow\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2C}+\frac{v^2}{\operatorname{sh}^2C}=1$ для $C\neq0$. При $C=0$ имеем $v=0$ и $u=\cos y$. Значит, находим $u\in[-1;1]$, $v=0$. Получим семейство софокусных эллипсов с фокусами

в точках ± 1.

Если $y=C$, то $u=\cos C\,\mathrm{ch}\,x$, $v=\sin C\cdot\mathrm{sh}\,x \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2 C}-\frac{v^2}{\sin^2 C}=1$ для $C\neq\frac{\pi n}{2}$. Получим семейство софокусных гипербол с фокусами в точках ± 1. При $C=\pi n$ находим $v=0$, $u=(-1)^n\mathrm{ch}\,x$, что означает луч $[1;+\infty)$ при четном n и луч $(-\infty;-1]$ при нечетном n. При $C=\frac{\pi}{2}+\pi n$ находим $u=0$, $v=(-1)^n\mathrm{sh}\,x$, что означает мнимую ось, пробегаемую при четном n от $-\infty$ до $+\infty$ и в обратном направлении при нечетном n.

2) При $y=0$ имеем $u=\mathrm{ch}\,x$, $v=0$, а при $y=\pi$ находим $u=-\mathrm{ch}\,x$, $v=0$. Значит, исходная функция отображает полосу $0<y<\pi$ на всю плоскость с разрезами по лучам $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$.

3) Поскольку $w(0)=1$, $w(\pi i)=-1$, то отрезок $[0,\pi i]$ переходит в отрезок $[-1;1]$ и направлению движения от πi к 0 соответствует движение по направлению от -1 к 1. При этом, точки плоскости w по правилу обхода находятся слева, то есть принадлежат верхней полуплоскости.

При $z=x$, $x\to+\infty$ луч $[0;+\infty)$ переходит в луч $[1;+\infty)$, а при $z=x+\pi i$, $x\to+\infty$ функция $w=-\mathrm{ch}\,x$ имеет предел $-\infty$ и луч $\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\,z\geqslant 0, \mathrm{Im}\,z=\pi i\}$ перейдет в луч $(-\infty;-1]$. В соответствии с правилом обхода полуполоса $x>0$, $0<y<\pi$ отображается функцией $w=\mathrm{ch}\,z$ на верхнюю полуплоскость.

13.83 Доказать, что регулярные ветви функции $w=z+\sqrt{z^2-1}$, обратной к функции Жуковского, конформно отображают:

1) плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1;1]$ соответственно на внутренность и внешность единичного круга с центром в начале координат;

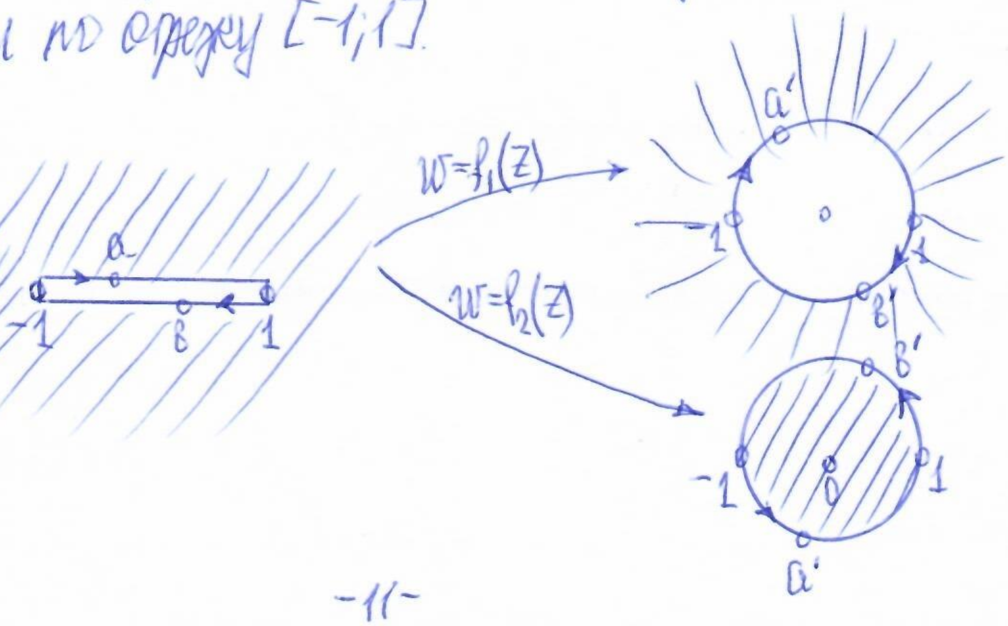
2) плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по лучам $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$ соответственно на верхнюю и нижнюю полуплоскость;

3) верхнюю полуплоскость на верхнюю полуплоскость без единичного круга с центром в начале координат;

4) верхнюю полуплоскость на внутренность единичного круга, лежащую в нижней полуплоскости.

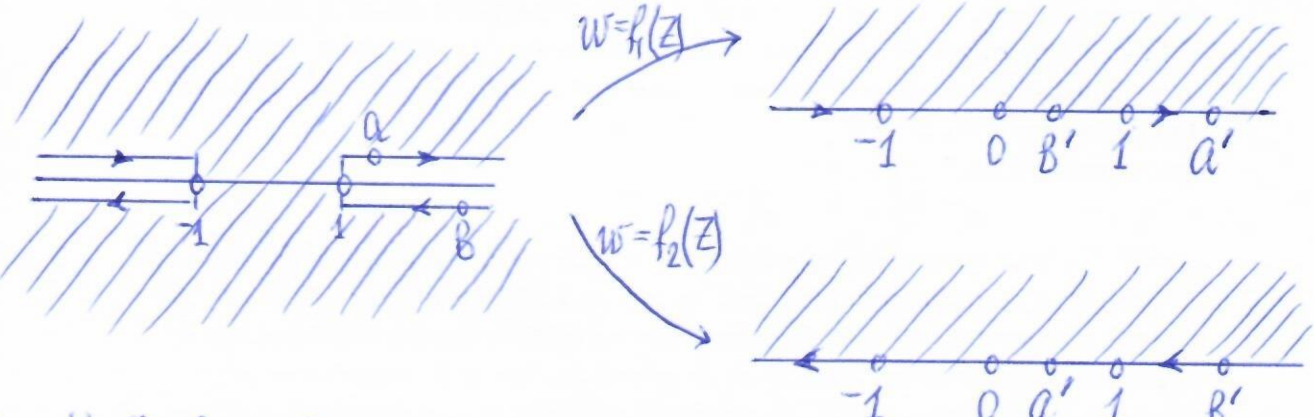
Решая уравнение $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ относительно z, находим $z = w+\sqrt{w^2-1}$, то есть функцию $w=z+\sqrt{z^2-1}$, которая является обратной к функции Жуковского. Следовательно, отображения этой функции являются обратными к отображениям функцией Жуковского. Рассматриваемая функция является аналитической в плоскости $\mathbb{C}$ с выколотыми точками ± 1, а в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом, соединяющим точки ± 1, распадается на две регулярные ветви.

1) В области $\mathbb{C} \setminus [-1;1]$ функция $w=z+\sqrt{z^2-1}$ распадается на две регулярные ветви $f_1(z), f_2(z)$, где $f_1(\infty)=\infty$, $f_2(\infty)=0$. Отображения функцией $w=z+\sqrt{z^2-1}$ являются обратными к отображениям функцией Жуковского. Из 13.82 1) следует, что функция Жуковского конформно отображает внешность единичного круга на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1;1]$ и внутренность единичного круга на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1;1]$.

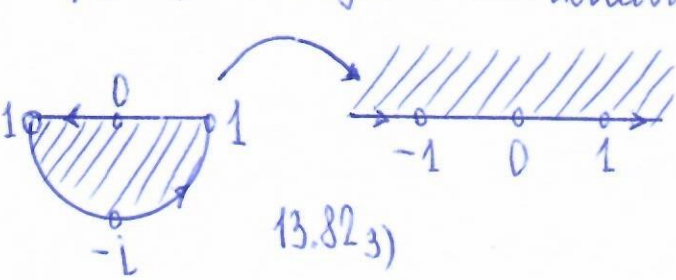


Поэтому, отсюда следует, что функция $w=f_1(z)$ конформно отображает плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1;1]$ на внешность единичного круга, а функция $w=f_2(z)$ отображает конформно плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1;1]$ на внутренность единичного круга.

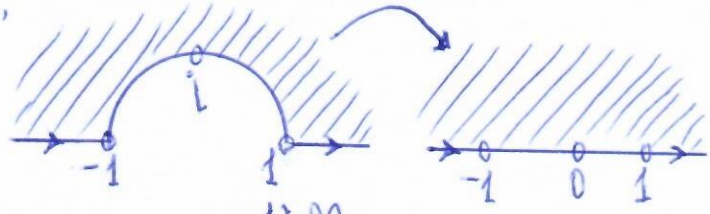
2) В области $\mathbb{C}\setminus\{(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\}$ функция $w=z+\sqrt{z^2-1}$ распадается на две регулярные ветви $f_1(z), f_2(z)$, где $f_1(0)=i$, $f_2(0)=-i$. Из 13.82 2) следует, что функция Жуковского конформно отображает верхнюю полуплоскость на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по лучам $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$, и нижнюю полуплоскость на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по лучам $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$. Поэтому, функция $w=f_1(z)$ конформно отображает плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по лучам $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$ на верхнюю полуплоскость, а функция $w=f_2(z)$ отображает конформно плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по лучам $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$ на нижнюю полуплоскость.



3) и 4) В верхней полуплоскости функция $w=z+\sqrt{z^2-1}$ распадается на две регулярные ветви $f_1(z), f_2(z)$, где $f_1(0)=i$, $f_2(0)=-i$. Из 13.82 3),4) для функции Жуковского имеем:

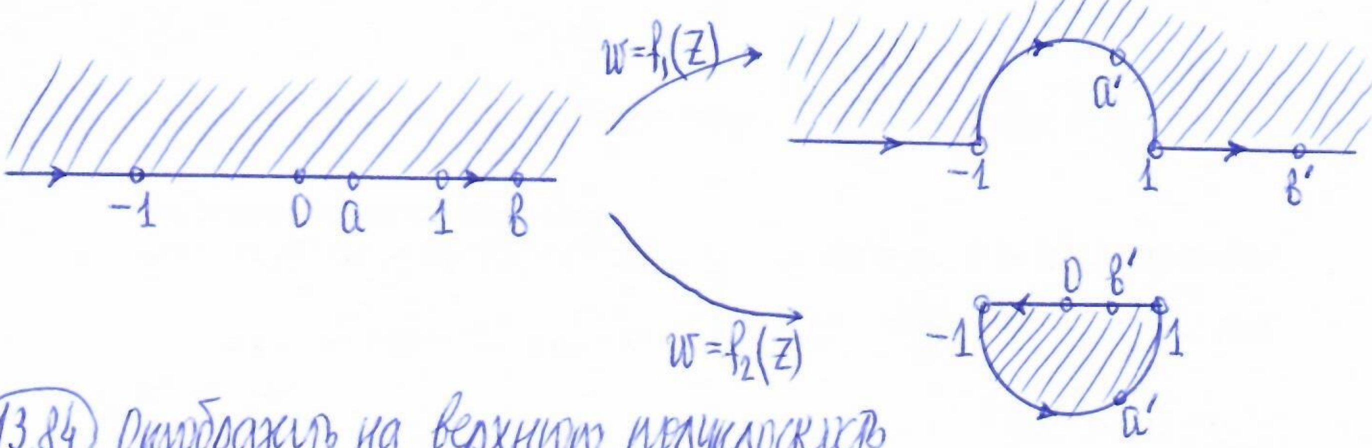


13.82 3)



13.82 4)

Тогда для функции $w = z+\sqrt{z^2-1}$ находим:



13.84 Отобразить на верхнюю полуплоскость $\{w\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} w>0\}$ следующие области:

1) $\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}\setminus[\frac{1}{2};1]$;

2) $\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}\setminus\{[-1;0]\cup[a,1]\}$, $0<a<1$;

3) $\{z\in\mathbb{C} : |z|>1\}\setminus\{[-a;-1]\cup[1;+\infty)\}$, $a>1$;

4) $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0, |z|<1\}\setminus[0;ai]$, $0<a<1$;

5) $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0, |z|<1\}\setminus[ai,i]$, $0<a<1$.

1) Функция Жуковского $w_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ отображает заданную область на всю плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1;\frac{5}{4}]$. Получили задачу 13.75 2), в которой $z_1=-1$, $z_2=\frac{5}{4}$. Следовательно, имеем функцию

$$w=\sqrt{\frac{w_1-(-1)}{\frac{5}{4}-w_1}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}}$$

2) Функция Жуковского $w_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ отображает заданное множество на всю плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $(-\infty;\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})]$. Действительно, $\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\geq\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=1$, $w_1=u_1\to-\infty$ при $z=x\to-0$, а окружность $\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$ переходит в разрез по отрезку $[-1;1]$. В

итоге, получаем плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $(-\infty; \frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})]$. Функция $w_2 = w_1 - \frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})$ отображает плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $(-\infty; \frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})]$ на всю плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси. Функция $w_3 = -w_2$ отображает плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $(-\infty; 0]$ на всю плоскость с разрезом вдоль луча $[0; +\infty)$. Следовательно, имеем функцию

$$w = \sqrt{w_3} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)}.$$

3) Функция Жуковского $w_1 = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ отображает заданное множество на всю плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $[-\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a}), +\infty)$. Действительно, окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ переходит в разрез по отрезку $[-1; 1]$. Разрез по лучу $[1; +\infty)$ переходит в разрез по лучу $[1; +\infty)$, а разрез по отрезку $[-a; -1]$ переходит в разрез по отрезку $[-\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a}); -1]$.

Функция $w_2 = w_1 + \frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})$ отображает плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $[-\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a}); +\infty)$ на всю плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $[0; +\infty)$. Тогда, искомое отображение имеет вид

$$w = \sqrt{w_2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)}.$$

4) Функция $w_1 = z^2$ отображает заданное множество на единичный круг с разрезом вдоль отрезка $[-a^2; 1]$. Функция Жуковского $w_2 = \frac{1}{2}(w_1 + \frac{1}{w_1})$ отображает этот круг с разрезом на всю плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами вдоль лучей $(-\infty; -\frac{1}{2}(a^2+\frac{1}{a^2})]$ и $[0; +\infty)$. Функция вида:

$$w_3 = \frac{w_2 + \frac{1}{2}(a^2 + \frac{1}{a^2})}{w_2}$$

отображает эту плоскость $\mathbb{C}$ с двумя разрезами на всю плоскость с разрезом вдоль положительной действительной полуоси. Значит, искомое отображение имеет вид $w = \sqrt{w_3}$, или

$$w = \sqrt{\frac{(z^2+\frac{1}{z^2}) + (a^2+\frac{1}{a^2})}{z^2+\frac{1}{z^2}}}.$$

5) Функция $w_1 = z^2$ отображает заданное множество на единичный круг с разрезами по отрезкам $[-1; -a^2]$ и $[0,1]$. Функция Жуковского $w_2 = \frac{1}{2}(w_1 + \frac{1}{w_1})$ отображает этот круг с двумя разрезами на всю плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль луча $[-\frac{1}{2}(a^2+\frac{1}{a^2}); +\infty)$. Функция $w_3 = w_2 + \frac{1}{2}(a^2+\frac{1}{a^2})$ отображает плоскость $\mathbb{C}$ с указанным разрезом на всю плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль положительной действительной полуоси. Значит, искомое отображение имеет вид $w = \sqrt{w_3}$, или

$$w = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right) + \left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\right)}.$$

(13.80) Найти образы при отображении $w = \ln z$:

1) полярной се ки $|z| = R$, $\arg z = \theta$;

2) логарифмической спирали $r = Ae^{k\varphi}$, $A > 0$;

3) угла $\{z \in \mathbb{C}: 0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi\}$;

4) сектора $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1, 0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi\}$;

5) кольца $\{z \in \mathbb{C}: \quad < |z| < r_2\}$ с разрезом по отрезку $[r_1, r_2]$.

Функция $w = \ln z$ является аналитической функцией в плоскости $\mathbb{C}$ с выколотыми точками 0 и ∞, а в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом, соединяющим точки 0, ∞, распадается на бескосчётное число регулярных ветвей

$$w_k=(\ln z)_k=\ln|z|+i\left((\arg z)_0+2\pi k\right),\ k=0,\pm1,\pm2,\dots,$$

где $0<(\arg z)_0<2\pi$. В качестве такого разреза рассматриваем луч $[0;+\infty)$. Тогда, функция $w_k=(\ln z)_k$ конформно отображает плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $[0;+\infty)$ на полосу $2\pi k<\operatorname{Im}w<\pi+2\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$

Рассмотрим $k=0$.

1) Если $|z|=R$, то имеем $w_0=(\ln z)_0=\ln R+i(\arg z)_0$.

Значит, $u_0=C$. Здесь $w_k=u_k+iv_k$.

Если $\arg z=\theta$, то имеем $w_0=(\ln z)_0=\ln|z|+i\theta_0$.

Значит, $v_0=C$.

Поэтому, образом полярной сетки $|z|=R$, $\arg z=\theta$ является прямоугольная сетка $u=C$, $v=C$.

2) Имеем равенство

$$w_0=(\ln z)_0=\ln A+k\varphi+i\varphi=u_0+iv_0\Rightarrow u_0=\ln A+k\varphi,$$

$v_0=\varphi$. Следовательно, $u_0=\ln A+kv_0$. Значит, имеем прямую.

3) Лучи, соответствующие $\arg z=0$ и $\arg z=\alpha$, отвечают линиям $v=0$ и $v=\alpha$. Учитывая направление обхода области, получаем полосу $\{w\in\mathbb{C}:\ 0<v<\alpha\}$.

4) Лучи, соответствующие $\arg z=0$ и $\arg z=\alpha$ переходят в прямые $v=0$ и $v=\alpha$, а окружность $|z|=1$ отображается в отрезок $u=0$, $v\in[0,\alpha]$. Учитывая направление обхода области, имеем полуполосу $\{w\in\mathbb{C}:\ u<0,\ 0<v<\alpha\}$.

5) Образами окружностей $|z|=r_1$, $|z|=r_2$ являются прямые $u=\ln r_1$, $u=\ln r_2$. Поэтому, учитывая направление обхода области, имеем полосу $\{w\in\mathbb{C}:\ \ln r_1<u<\ln r_2\}$.

13.93 Отобразить конформно следующие области на верхнюю полуплоскость $\{w\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} w>0\}$:

1) плоскость с разрезами по лучам $(-\infty; a]$ и $[b; +\infty)$, $-\infty<a<b<+\infty$.

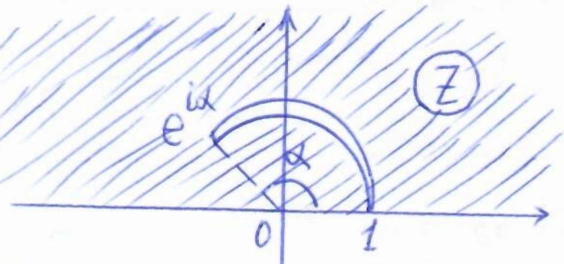
Линейная функция $w_1=\frac{2}{b-a}z-\frac{b+a}{b-a}$ отображает рассматриваемую область на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по лучам $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$. Тогда, из 13.83$_{2)}$ имеем желаемое отображение

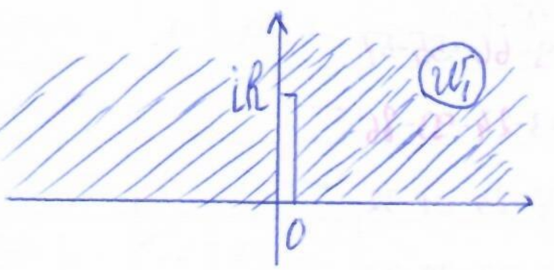
$$w=w_1+\sqrt{w_1^2-1},\ w(0)=i,$$

или

$$w=\frac{2}{b-a}z-\frac{b+a}{b-a}+\sqrt{\left(\frac{2}{b-a}z-\frac{b+a}{b-a}\right)^2-1},\ w\left(\frac{b+a}{2}\right)=i.$$

2) полуплоскость $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$ с разрезом по дуге $|z|=1$, $0\le\arg z\le\alpha$, $0<\alpha<\pi$.



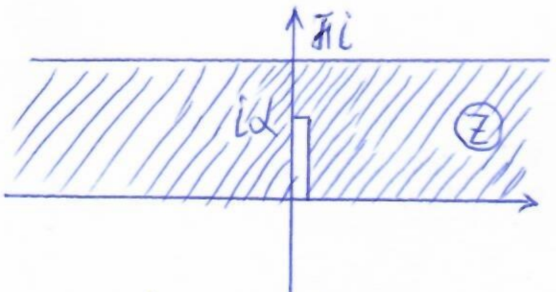


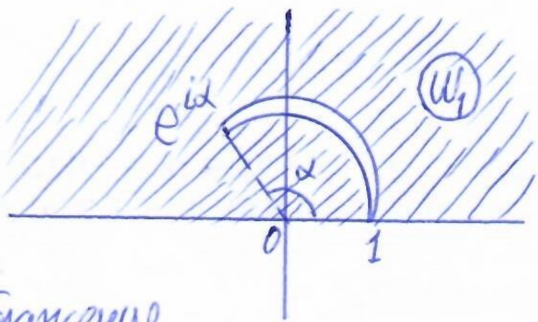
Функция $w_1=\frac{z-1}{z+1}$ переводит полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ и разрез по данной дуге в полуплоскость $\operatorname{Im} w_1>0$ и разрез по отрезку $[0, ih]$, так как $w_1(1)=0$, $w_1(-1)=\infty$, где $h=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Тогда, из 13.75$_{5)}$ имеем желаемое отображение $w=\sqrt{w_1^2+h^2}$, или

$$w=\sqrt{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

3) полосу $\{z\in\mathbb{C} : 0<\operatorname{Im} z<\pi\}$ с разрезом по отрезку $[0, i\alpha]$, $0<\alpha<\pi$.

Функция $w_1=e^z$ отображает рассматриваемую область на область, изображенную на соответствующем рисунке. Тогда, из





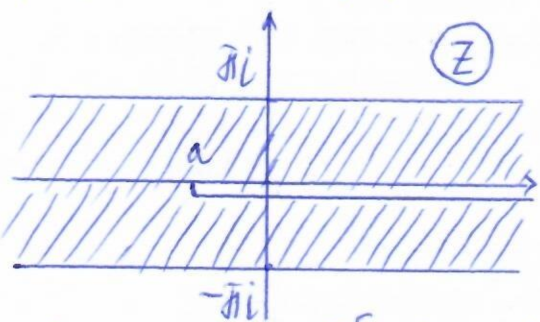
13.93$_{2)}$ вытекает желаемое отображение

$$w=\sqrt{\left(\frac{w_1-1}{w_1+1}\right)^2+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\,,$$

или

$$w=\sqrt{\left(\frac{e^z-1}{e^z+1}\right)^2+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\,.$$

4) полосу $\{z\in\mathbb{C}:\ -\pi<\operatorname{Im}z<\pi\}$ с разрезом по лучу $[a;+\infty)$, $a\in\mathbb{R}$.



Функция $w_1=e^z$ отображает рассматриваемую область на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по лучам $(-\infty;0]$ и $[e^a;+\infty)$. Тогда, из 13.93$_{1)}$ имеем желаемое отображение

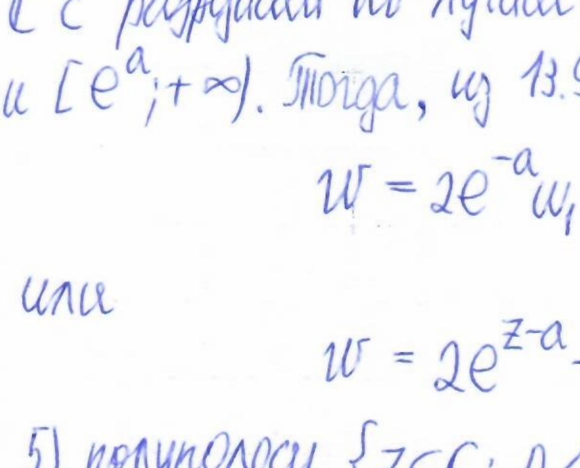
$$w=2e^{-a}w_1-1+\sqrt{(2e^{-a}w_1-1)^2-1}\,,$$

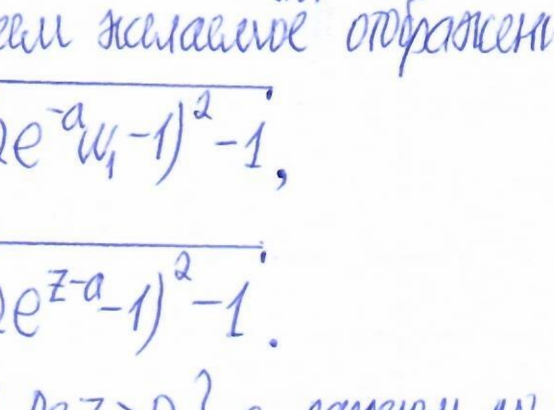
или

$$w=2e^{z-a}-1+\sqrt{(2e^{z-a}-1)^2-1}\,.$$

5) полуполосу $\{z\in\mathbb{C}:\ 0<\operatorname{Im}z<\pi,\ \operatorname{Re}z>0\}$ с разрезом по отрезку $[i\frac{\pi}{2};a+i\frac{\pi}{2}]$, $a>0$.

Как следует из 13.90$_{3)}$, функция $w_1=\operatorname{ch}z$ отображает рассматри-





ваемую область на полуплоскость $\operatorname{Im} w_1 > 0$ с разрезом по отрезку $[0, i\,\operatorname{sh} a]$. Тогда, из 13.75$_{5)}$ имеем желаемое отображение

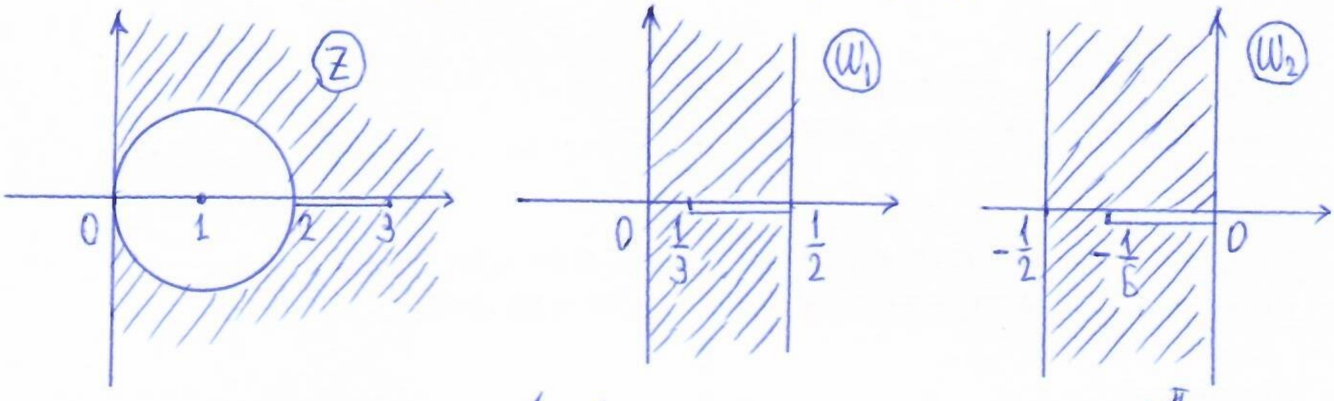
$$w = \sqrt{w_1^2 + \operatorname{sh}^2 a}\,,$$

или

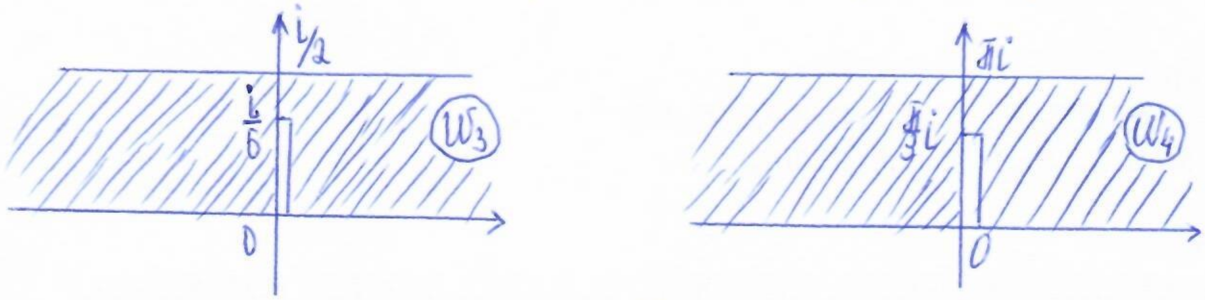
$$w = \sqrt{\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 a}\,.$$

б) область $\{ z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1,\ \operatorname{Re} z > 0 \}$ с разрезом по отрезку $[2,3]$.

Функция $w_1 = \frac{1}{z}$ отображает рассматриваемую область на полосу $0 < \operatorname{Re} w_1 < \frac{1}{2}$ с разрезом по отрезку $[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$.



Далее, имеем $w_2 = w_1 - \frac{1}{2}$. Затем, находим $w_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}} w_2$



Далее, получаем $w_4 = 2\pi w_3$. Тогда, из 13.93$_{3)}$ находим желаемое отображение

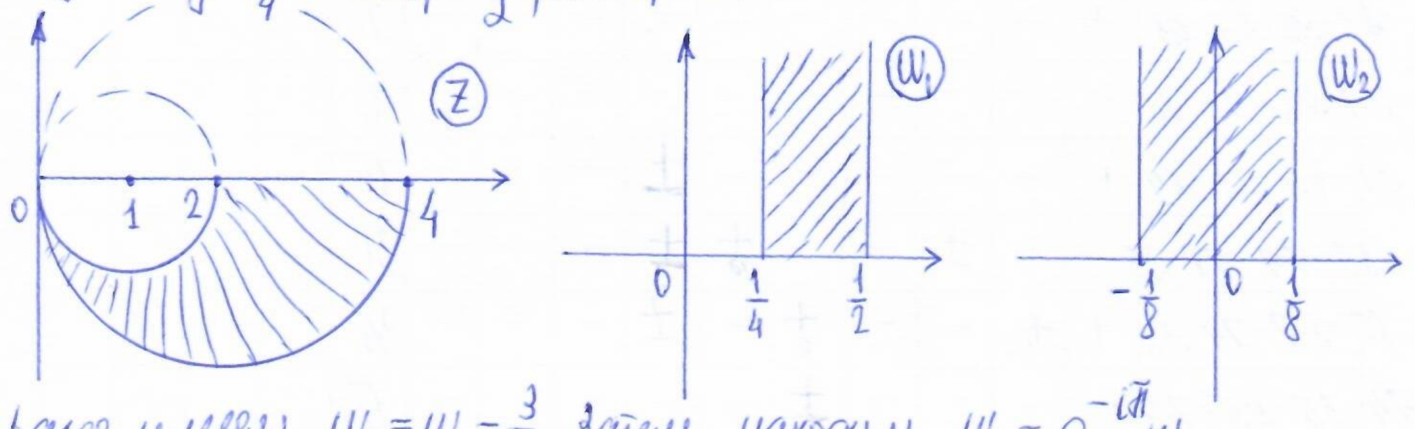
$$w = \sqrt{\left(\frac{e^{w_4} - 1}{e^{w_4} + 1}\right)^2 + \frac{1}{3}}\,,$$

или

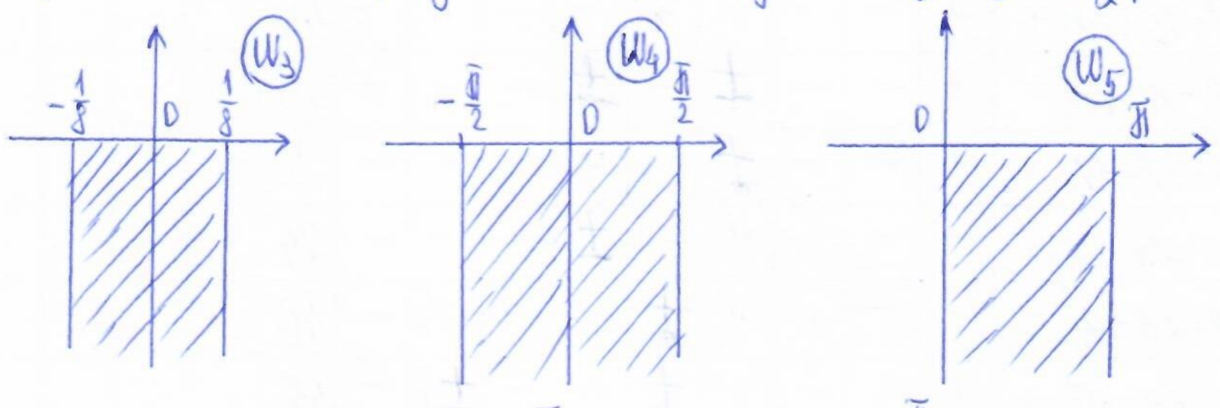
$$w = \sqrt{\left(\frac{e^{i\pi(1 - 2/z)} - 1}{e^{i\pi(1 - 2/z)} + 1}\right)^2 + \frac{1}{3}}\,.$$

7) область $\{z\in\mathbb{C}: |z-1|>1, |z-2|<2, \operatorname{Im} z<0\}$

Функция $w_1=\frac{1}{z}$ отображает рассматриваемую область на полуполосу $\frac{1}{4}<\operatorname{Re} w_1<\frac{1}{2}, \operatorname{Im} w_1>0$.



Далее, имеем $w_2=w_1-\frac{3}{8}$. Затем, находим $w_3=e^{-i\pi}w_2$.



После чего, получаем $w_4=4\pi w_3$ и $w_5=w_4+\frac{\pi}{2}$. Наконец, из 13.88 2) имеем желаемое отображение $w=\cos w_5$, или окончательно

$$w=\cos\frac{4\pi}{z}.$$

8) плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[a,b]$, $-\infty<a<b<+\infty$.

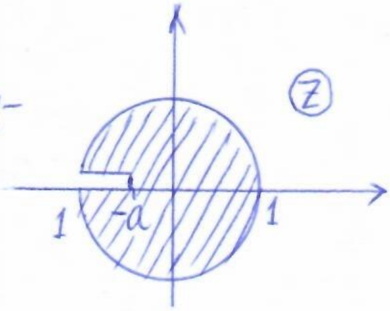
Линейная функция $w_1=\frac{2}{b-a}z-\frac{b+a}{b-a}$ отображает рассматриваемую область на внешность отрезка $[-1;1]$. Тогда, из 13.83 1) находим желаемое отображение

$$w=w_1+\sqrt{w_1^2-1},\ w(\infty)=0,$$

или

$$w=\frac{2}{b-a}z-\frac{b+a}{b-a}+\sqrt{\left(\frac{2}{b-a}z-\frac{b+a}{b-a}\right)^2-1},\ w(\infty)=0.$$

9) внутренность единичного круга $\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ с разрезом по отрезку $[-1;-a]$, $0<a<1$.



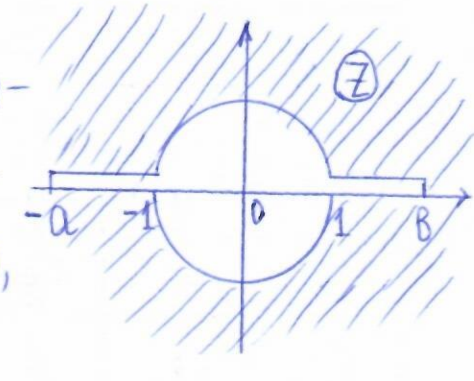
Функция Жуковского $w_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ отображает рассматриваемую область на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $\left[-\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right);1\right]$. Тогда, из $13.93_{8)}$ имеем желаемое отображение

$$w=\frac{2}{1+\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}w_1-\frac{1-\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}{1+\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}+\sqrt{\left(\frac{2}{1+\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}w_1-\frac{1-\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}{1+\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}\right)^2-1},$$

или для $w(\infty)=0$

$$w=\frac{2a}{(1+a)^2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2+\sqrt{\left(\frac{2a}{(1+a)^2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\right)^2-1}.$$

10) внешность единичного круга $\{z\in\mathbb{C}; |z|>1\}$ с разрезами по отрезкам $[-a;-1]$ и $[1;b]$; $a,b>1$.



Функция Жуковского $w_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ отображает рассматриваемую область на внешность отрезка $\left[-\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right);\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right]$. Тогда, из $13.93_{8)}$ имеем желаемое отображение

$$w=\frac{2}{\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}w_1-\frac{\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}+$$

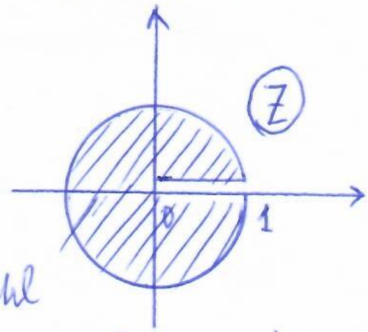
$$+\sqrt{\left(\frac{2}{\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}w_1-\frac{\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}\right)^2-1},\ w(\infty)=0,$$

или

$$w=\frac{2}{\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)}\left(z+\frac{1}{z}\right)-\frac{\left(b+\frac{1}{b}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)}{\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)}+$$

$$+\sqrt{\left(\frac{2}{\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)}\left(z+\frac{1}{z}\right)-\frac{\left(b+\frac{1}{b}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)}{\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)}\right)^2-1}\,,\quad w(\infty)=0.$$

11) внутренность единичного круга $\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ с разрезом по отрезку $[0,1]$.



Функция Жуковского $w_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ отображает рассматриваемую область на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $[-1;+\infty)$. Функция $w_2=w_1+1$ переведет плоскость с разрезом по лучу $[-1;+\infty)$ на всю плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $[0;+\infty)$. Наконец, из 13.69 находим искомое отображение $w=\sqrt{w_2}$, $w(-4)=2i$, или

$$w=\sqrt{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}\,,\quad w(-5+2\sqrt{6})=2i.$$